

# **APLICACIONES DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN INGENIERIA**

Recopilación de las comunicaciones presentadas en el  
1.<sup>er</sup> simposium nacional sobre aplicaciones del método  
de los elementos finitos en ingeniería.

Editado por:  
E. Oñate, E. E. Alonso y M. Casteleiro  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad Politécnica de Barcelona.

## APLICACION DEL M.E.F. AL DIBUJO DE CURVAS

L. MORENO, A. BERMUDEZ, A. SAMARTIN

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE SANTANDER

### 1. INTRODUCCION

El método de los elementos finitos surgió hace más de veinticinco años (1), como respuesta para la resolución de un problema estructural. Desde entonces su progreso ha sido extraordinario, constituyendo actualmente una importante herramienta para el estudio de problemas de campos matemáticos, que permiten modelar una gran variedad de situaciones físicas. Los fundamentos matemáticos del método han sido bien establecidos (2), y numerosas variaciones y planteamientos son posibles: técnicas de las funciones pesantes (Galerkin, colocación, etc.), procedimientos semianalíticos (bandas finitas, lajas y prismas finitos, etc.), así como el conocido método de los elementos de contorno, son algunos ejemplos de las numerosas posibilidades existentes. Una revisión de las mismas puede verse en (3). Aquí, se presenta una aplicación muy concreta al trazado de carreteras, que puede ser de interés en algunos casos específicos como en el tratamiento del problema de optimización.

### 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde un punto de vista matemático el trazado en planta del eje de una carretera puede establecerse como sigue:

Se conocen las coordenadas globales de  $N$  puntos,  $P_i(x_i, y_i)$  ordenados según la dirección de avance en el eje.

El problema consiste en determinar una curva que pase por los citados puntos y sea continua, y más aún, con pendiente y curvatura continuas. Esta curva podrá satisfacer, además una serie de condiciones adicionales de "contorno", en el sentido, de imponer pendientes en los puntos de entrada, salida o intermedios, o bien valores de las curvaturas en algunos de estos puntos arbitrarios  $P_i$ .

### 3. APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Se denomina  $i$ , al segmento que une los dos puntos,  $P_i$  y

y  $P_{i+1}$ . Según la figura se puede escribir:

$$l_i = 1/2 \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$\cos \alpha_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2l_i} ; \quad \text{sen} \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{2l_i}$$

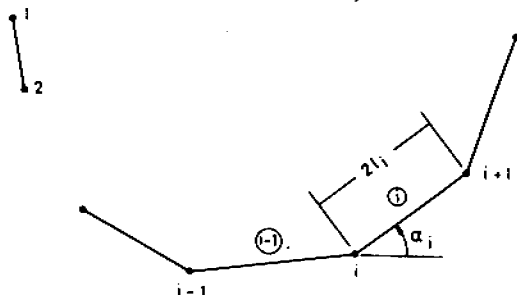


Figura 1. Poligonal.

A la curva que se busca,  $y=y(x)$ , que pasa por los puntos  $P_i$  y es continua  $C^2$ , se le impone la condición siguiente de "suavizado":

$$y(x) \text{ minimiza la funcional } \int \frac{ds}{R^2} \quad (1)$$

En donde la integral curvilínea se extiende a  $y=y(x)$ , ds es la diferencial de arco y R el radio de curvatura (\*).

Como es conocido, la técnica de los elementos finitos - permite resolver el problema (1), mediante la expresión de  $y = y(x)$  como unión de funciones a trozos. En este caso, son válidas las siguientes consideraciones:

Se adoptan para el segmento  $i, \overline{P_i P_{i+1}}$ , los ejes de coordenadas adimensionales  $(\xi, \eta)$ , indicados en la figura 2 y que se relacionan con los globales mediante las expresiones:

$$\xi = \frac{1}{l_i} \left( x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \cos \alpha_i + \frac{1}{l_i} \left( y - \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right) \text{sen} \alpha_i$$

$$\eta = \frac{1}{l_i} \left( x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \text{sen} \alpha_i + \frac{1}{l_i} \left( y - \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right) \cos \alpha_i$$

NOTA(\*): La funcional a minimizar expresada por la fórmula (1) presenta únicamente una posibilidad entre muchas. Otras formulaciones de la funcional podrían incluir derivados de la curvatura indicadores del nivel de comodidad del usurario. La generalización a estos casos es directa. - Ver (7).

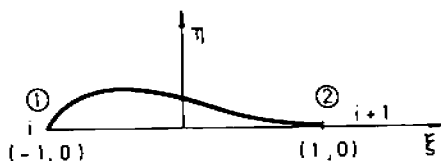


Figura 2. Elemento genérico.

y cuya transformación inversa, es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + l_i (\xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) \\ y &= \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + l_i (\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) \end{aligned} \quad (3)$$

Como es usual en el método de los elementos finitos, la curva  $y = y(x)$  que se desea conocer, puede expresarse dentro del tramo  $P_i P_{i+1}$ , en la siguiente forma:

$$\eta = (N_1, \bar{N}_1, N_2, \bar{N}_2) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ c_1 \\ \theta_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

en donde  $\theta_\alpha$ ,  $c_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) son las pendientes y curvatura del punto  $\alpha$  (primero o segundo) correspondientes a  $i$  e  $i+1$  respectivamente en el caso de la figura n° 2. Se ha introducido, como se comprueba, una numeración local en el segmento  $P_i P_{i+1}$ . Las funciones  $N_\alpha$ ,  $\bar{N}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) corresponden a las funciones de interpolación o de forma, y se adoptan normalmente polinomios de la abscisa  $\xi$ .

Con objeto de linealizar el problema, se supone que los puntos  $P_i P_{i+1}$  están lo suficientemente próximos para que la curvatura pueda expresarse por la derivada segunda de la abscisa respecto a la ordenada, es decir, se admite la aproximación:

$$c = \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \left( 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right)^{-3/2} \approx \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}$$

es decir, se supone

$$\left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \ll 1 \quad (5)$$

En este caso, las funciones de interpolación son los polinomios hermíticos de quinto orden:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/16(5 - 7\xi - 6\xi^2 + 10\xi^3 + \xi^4 - 3\xi^5) \\ N_2 &= -1/16(5 + 7\xi - 6\xi^2 - 10\xi^3 + \xi^4 + 3\xi^5) \\ \bar{N}_1 &= 1/16(1 - \xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 - \xi^5) \\ \bar{N}_2 &= 1/16(1 + \xi - 2\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4 + \xi^5) \end{aligned} \quad (6)$$

Se comprueba que estas funciones de interpolación satisfacen las igualdades:

$$N_1(-1) = 0, N_1(1) = 0 \quad ; \quad N_2(-1) = 0, N_2(1) = 0$$

$$\left. \frac{dN_1}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 1 \qquad \qquad \left. \frac{dN_2}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0$$

$$\left. \frac{dN_1}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{dN_2}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 1$$

$$\left. \frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=-1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \right|_{\xi=-1} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0$$

$$\bar{N}_1(-1) = 0, \bar{N}_1(1) = 0 \quad ; \quad \bar{N}_2(-1) = 0, \bar{N}_2(1) = 0$$

$$\left. \frac{d\bar{N}_1}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{d\bar{N}_2}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0$$

$$\left. \frac{d\bar{N}_1}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{d\bar{N}_2}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{N}_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=-1} = 1 \qquad \qquad \left. \frac{d^2 \bar{N}_2}{d\xi^2} \right|_{\xi=-1} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{N}_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \qquad \qquad \left. \frac{d^2 \bar{N}_2}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 1$$

Estas propiedades típicas de las funciones de forma, permiten su determinación analítica. Se representan en la figura 3.

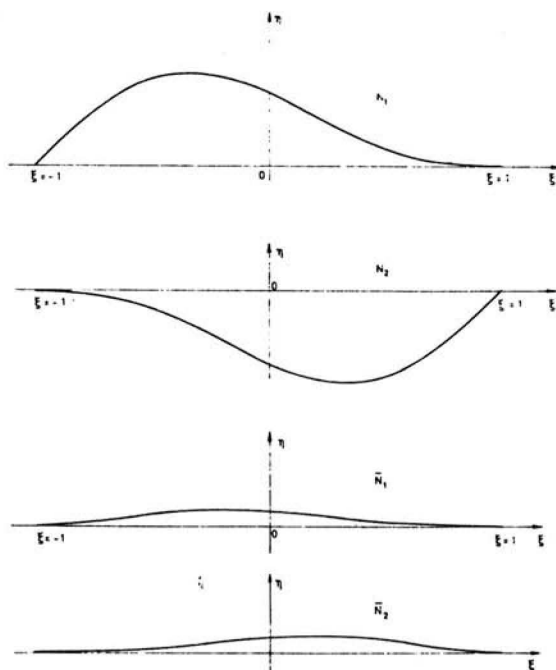


Figura 3. Funciones de interpolación.

La ecuación (4) se puede escribir en la siguiente forma - más conveniente:

$$\eta = \begin{pmatrix} N_1^* & N_2^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} N_\alpha^* &= (N_\alpha, \bar{N}_\alpha) \\ \underline{d}_\alpha &= \begin{bmatrix} \theta_\alpha \\ c_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_\alpha \\ \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_\alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

Las condiciones de continuidad a cumplir, son de tipo  $C^2$ , es decir, la primera y segunda derivadas respecto a unos mismos ejes deben de ser iguales en los nudos considerados como extremos de los elementos contiguos. Es decir, según la figura 4 se

puede escribir:

$$\begin{aligned}\theta_2^{i-1} - m_i &= \theta_1^i + m_i = \lambda_i \quad (\text{derivadas primeras}) \\ \frac{1}{l_{i-1}} c_2^{i-1} &= \frac{1}{l_i} c_1^i = \bar{\lambda}_i \quad (\text{derivadas segundas})\end{aligned} \quad (8)$$

siendo:

$$m_i = \operatorname{tg} \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{2}$$

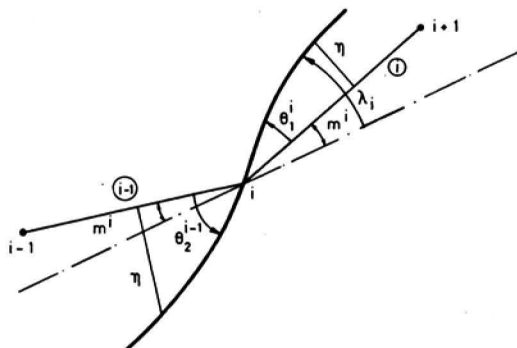


Figura 4. Condiciones de continuidad.

$\theta_j^i, c_j^i$  son la pendiente y curvatura del extremo del tramo  $j$ . ( $\alpha^i = 1, 2$ ;  $j = i-1, i$ ).

Los parámetros  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$ , deben elegirse de modo que la funcional (1) sea mínima, es decir:

$$E = E(y) = 1/2 \int \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 ds = 1/2 \sum_{i=1}^I \frac{1}{l_i} \int \left( \frac{d^2 \eta^i}{d\xi^2} \right)^2 d\xi \quad (9)$$

en donde  $\eta^i$  corresponde a la flecha en el intervalo  $\overline{P_i P_{i+1}}$ , dada por la expresión (4) e  $I$  es el número de tramos (igual a  $N-1$  en el caso de una poligonal abierta).

La contribución a (9) de un elemento genérico  $i$ , es:

$$E_i = \frac{1}{2l_i} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^2 \eta^i}{d\xi^2} \right)^2 d\xi = \frac{1}{2l_i} \int_{-1}^1 \{ (N_1'' \cdot N_2'') \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} \}^T \{ N_1'' N_2'' \} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} \} d\xi$$

o bien:

$$E_i = \frac{1}{2l_i} (\underline{d}_1^T \underline{d}_2^T) \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$k_{\alpha, \beta} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N''_{\alpha} & N''_{\beta} & \bar{N}''_{\alpha} & \bar{N}''_{\beta} \\ \bar{N}''_{\alpha} & N''_{\beta} & \bar{N}''_{\alpha} & \bar{N}''_{\beta} \end{bmatrix} d\xi$$

matriz de dimensión (2x2) y en donde se indica por doble acento la derivada segunda respecto a  $\xi$ .

Las expresiones de las matrices  $k$ , una vez realizadas las integraciones, son:

$$k_{11} = 1/35 \begin{bmatrix} 96 & 11 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$k_{12} = 1/35 \begin{bmatrix} 54 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = 1/35 \begin{bmatrix} 96 & -11 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$k_{21} = k_{12}^T$$

Se supone, en principio que los valores  $m_i$  son nulos, es decir que se cumple:

$$\theta_2^{i-1} = \theta_1^i = \lambda_i$$

$$\frac{1}{1_{i-1}} c_2^{i-1} = \frac{1}{1_i} c_1^i = \bar{\lambda}_i$$

Por lo tanto se obtiene:

$$E_2 = 1/2 \left( u_1^{iT} \ u_2^{iT} \right) \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{22}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \end{bmatrix}$$

con:

$$k_{\alpha \beta}^i = \frac{1}{1_i} \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 N''_{\alpha} N''_{\beta} d\xi & \int_{-1}^1 N''_{\alpha} \bar{N}''_{\beta} d\xi \\ \int_{-1}^1 \bar{N}''_{\alpha} N''_{\beta} d\xi & \int_{-1}^1 \bar{N}''_{\alpha} \bar{N}''_{\beta} d\xi \end{bmatrix}$$

$$u_{\alpha}^i = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \bar{\lambda}_{\alpha} \end{bmatrix} \text{ del extremo } \alpha, (\alpha=1,2), \text{ del tramo } i$$

$$u_1^i = u_{i-1}$$

$$u_2^i = u_i$$

Resulta, entonces, que la funcional (9) se transforma en:



$$E = \sum_{i=1}^I E_i$$

Cuyo mínimo se alcanza para las condiciones:

$$\frac{\partial E}{\partial u^i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N(\text{nudos})$$

y se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & k_{12}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

que corresponde a la situación de poligonal abierta usual en la práctica de carreteras ( $N = l+1$ ).

Evidentemente, la solución del sistema lineal de ecuaciones (10), con  $2N$  incógnitas, es trivial:  $u_i = 0$  para todo  $i$ , que corresponde a una recta.

Se introducen unas distorsiones en cada tramo  $i$ , de valor en sus extremos:

$$\hat{\theta}_1^i = -m_i \quad \hat{\theta}_2^i = m_{i+1}$$

con lo que resultan los "esfuerzos iniciales o de empotramiento rígido" en cada tramo:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_1^i \\ \hat{p}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10}^i \\ u_{20}^i \end{bmatrix}$$

con:

$$\begin{aligned} u_{10}^i &= \begin{bmatrix} -m_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ u_{20}^i &= \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ p_a^i &= \begin{bmatrix} \mu_a^i \\ \bar{\mu}_a^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

las cantidades duales a la pendiente y curvatura. ( $\alpha = 1, 2$ ).

De esta forma, resulta el sistema final de ecuaciones lineales, que permite determinar las incógnitas  $u$ .

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots & k_{22}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{I+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 + p_1^2 \\ p_2^2 + p_1^3 \\ \cdot \\ p_2^I \end{bmatrix} \quad (11)$$

con  $I = N-1$ , el número de tramos y  $N$  el número de nudos de la poligonal.

Resuelto el sistema (11), se deducen los valores de la pendiente y curvatura en los extremos de cada tramo  $i$ , ( $\theta_i^1, c_i^1$ ) y mediante las ecuaciones de interpolación (4) y las de transformación (3), las coordenadas  $(x, y)$  de los distintos puntos de la curva  $y = y(x)$  solución.

#### 4. EJEMPLOS DE APLICACION

Con objeto de comprobar la aproximación que se alcanzaría con la utilización del método, se estudian un conjunto de casos muy simples.

En los seis primeros, los datos corresponden a las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de cuatro puntos  $P_i$  situados en una circunferencia de radio  $R=100$ , y separados entre sí ángulos iguales  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  (figura 5) (\*).

Se analizan los resultados correspondientes a la pendiente  $\theta_i$  y a la curvatura  $c_i$ , en cada uno de los puntos  $P_i$ , deducidos mediante el método de los elementos finitos y los valores correspondientes a la circunferencia. A efectos de conocer la sensibilidad numérica del cálculo, se han considerado sucesivos valores del ángulo de separación entre puntos, con  $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ . También se ha estudiado el caso de los ángulos de separación distintos:  $\alpha_1 = 10^\circ, \alpha_2 = 20^\circ, \alpha_3 = 30^\circ$ . La comparación de los resultados se resumen en la tabla 1.

NOTA(\*): También se especifican en algunos casos las pendientes y/o curvaturas en los puntos de entrada y salida, es decir, en los puntos  $P_1$  y  $P_4$  respectivamente.

De la inspección de la misma se deduce que los resultados son prácticamente coincidentes con los valores correspondientes a la circunferencia cuando se especifican los valores de la curvatura y pendiente en los puntos de entrada y salida, incluso en

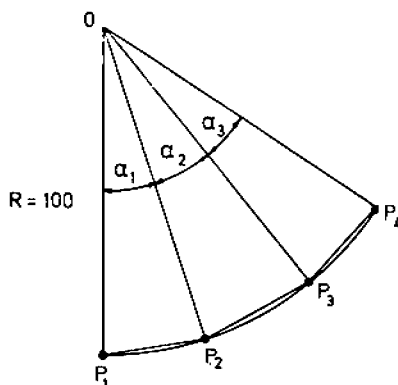


Figura 5. Ejemplos de aplicación.

la situación de ángulos elevados de separación entre puntos consecutivos (hasta  $30^\circ$  en ángulos iguales y  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , en el caso de ángulos desiguales). Esta misma consideración sigue siendo válida cuando únicamente se considera específica la alineación (pendiente) en los puntos extremos. Por el contrario, si se dejan completamente libres los valores de la curvatura y pendiente en la entrada y salida de la circunferencia, los resultados difieren con los exactos. La explicación de este hecho debe encontrarse en que es posible hallar una curva que pase por los cuatro puntos y produzca en la funcional (1) un valor menor que la circular prevista.

Otro caso, que permite representar una situación más real que la anterior, corresponde al indicado en la figura 6, que puede simular un cambio de curvatura en planta de un trazado. A efectos ilustrativos, se supone que la transición se lleva a cabo mediante dos clotoides de parámetros  $A=100$  y longitud 100 -

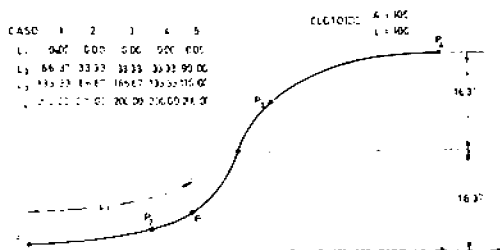


Figura 6. Ejemplo de aplicación.

cada una, como se indica en la figura 6. Se conocen como datos las coordenadas  $(x_i, y_i)$  alineación  $(\theta_i)$  y curvatura  $C_i$  de los puntos extremos  $P_1$  y  $P_4$ . Las coordenadas de dos puntos intermedios  $P_2$  y  $P_3$ , son asimismo datos. Estos dos puntos interiores se eligen al azar, situados sobre la curva de transición, con objeto de comprobar la bondad del método en situaciones extremas.

En particular se han estudiado cinco casos en los que la situación de cada punto viene definida por su distancia en desarrollo sobre la curva al punto de entrada.

Los resultados obtenidos se representan en la Tabla 2, - así como su comparación con los valores de la clotoide. Se comprueba, como era previsible dado el escaso número de puntos intermedios, ciertas discrepancias entre ambos valores, que se aminoran sensiblemente cuando los puntos intermedios elegidos se sitúan en las cercanías del punto singular de la alineación (inflexión o encuentro entre clotoides), como es el caso 5.

Con objeto de comprobar la influencia del número de puntos intermedios en la bondad de los resultados, se procede a - realizar un cálculo análogo al anterior pero considerando aho-

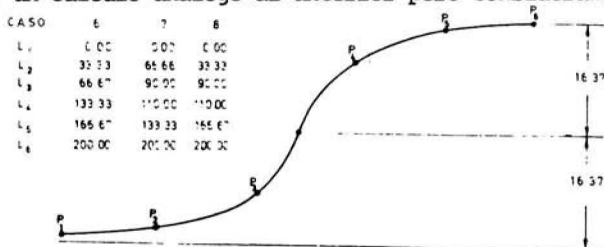


Figura 7. Ejemplo de aplicación.

ra seis puntos cuya situación viene indicada en la figura 7. Los resultados se muestran en la tabla 3, observándose una mejoría - sensible en la concordancia de resultados.

En conclusión se comprende que mediante el método de los elementos finitos, la alineación de puntos  $(x_i, y_i, \theta_i, c_i)$  permite definir unívocamente la traza del eje, de modo que ésta sea continua, con pendientes y curvaturas continuas y que minimice - una funcional de suavizado adecuada, del tipo de la ecuación (1) (\*). De este modo, no es necesario incluir tipos especiales de curvas (rectas, círculos, clotoides, etc.) para definir un eje; es suficiente expresarlo como una serie de puntos  $(x_i, y_i)$  de paso, con restricciones adicionales (ya sea en alineaciones o cur-

**NOTA(\*)**: Es posible, como se ha indicado, generalizar la funcional (1) mediante adición de términos que incluyan derivadas de distinto orden. A estos efectos, puede verse el reciente artículo de Irons, que trata del mismo tema, si bien desde otra perspectiva (7).

vaturas especificadas). Todos los puntos del eje comprendidos entre dos nudos consecutivos base, pueden ser determinados mediante las funciones de interpolación o de forma (6) de la técnica numérica de elementos finitos, como se acaba de indicar.

Evidentemente, en el caso de que las coordenadas de algunos puntos base  $P_i$  no se conozcan previamente, si bien se encuentren limitadas dentro de una zona o intervalo de validez, es posible su cálculo mediante métodos de falsa posición o directamente por programación matemática no lineal.

## 5. EXTENSIONES DEL METODO

Se comprende que la técnica que se acaba de describir puede ser extendida a casos más complejos, que incluyan condiciones de pendiente y curvatura especificadas en uno o varios puntos de la poligonal. El procedimiento es muy simple, y es exactamente igual que en las situaciones estructurales, en donde se introducen condiciones de contorno de una forma automática y general para cálculo mediante computador. A este respecto, es interesante la consulta (4). En particular, es posible la utilización de programas generales de cálculo de estructuras, como el STRESS, STRUDL, SAP, etc., en el tratamiento de estos casos.

Evidentemente, el tratamiento simultáneo de la planta y alzado se puede llevar a cabo siguiendo líneas paralelas a las indicadas. En este caso el funcional a minimizar podría ser:

$$\oint \{1/R^2 + \lambda^2 1/T^2\} ds \quad (12)$$

En donde  $1/R$  y  $1/T$  corresponden a las curvaturas principal de flexión y torsión,  $\lambda$  un parámetro que se puede especificar de acuerdo con las condiciones de servicialidad de la carretera. Puede a su vez, y probablemente es más adecuado, descomponerse la funcional anterior (12) en la siguiente:

$$\oint \{1/R_H^2 + \lambda_1^2/R_V^2 + \lambda_2^2/T\} ds$$

con  $R_H$  y  $R_V$  las curvaturas en los planos horizontal y vertical de la curva alabeada del eje.

Por último, si bien su aplicación al trazado de carreteras es más remoto, puede utilizarse con éxito el método de los elementos finitos, en las líneas anteriormente indicadas, a la representación de superficies (por ejemplo el terreno), que pasando por un conjunto de puntos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ , se encuentren condicionados por unos requerimientos de continuidad simple, que incluya la primera derivada hasta la curvatura. El aspecto más importante del método de los elementos finitos, en estos, como en otros problemas, está constituido por la selección de las funciones de forma o interpolación, puesto que el ensamblaje y resolución del sistema de ecuaciones (11) es standard y se encuentra programado en todos programas matriciales generales de estructuras, por ejemplo: (SAP, STRUDL, ANSYS, NASTRAN, etc.). Por ello, a título indicativo, se representa en la figura 8 una posibilidad de elemento  $C_2$ , que podría ser utilizado en estos problemas de representación de superficies muy suaves y continuas. En el caso que solamente se exigiera la continuidad de las pendientes, la selección de elementos triangulares y conformes, es inmensa, y corresponden a todos los elementos conformes de flexión de placas, que pueden verse en la literatura especializada, en particular las recientes publicaciones (5) y (6).

## 6. CONCLUSIONES

El método de los elementos finitos constituye una herramienta de discretización de problemas continuos. La aplicación a la solución de los problemas de los más diversos campos de la Ciencia y Técnica es impresionante. Aquí se ha mostrado mediante un ejemplo muy simple, las posibilidades que encierra en el estudio del trazado de carreteras.

## REFERENCIAS

- (1) M.I. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp: "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures". Journal of - Aerospace Science. Vol. 23, núm. 9. Septiembre (1956).
- (2) A.K. Aziz, I. Babuska y otros "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations" Academic Press. (1972).
- (3) O.C. Zienkiewicz: "El Método de los Elementos Finitos" Ed. Reverté, S.A. (1977).
- (4) R.K. Livesley: "Matrix Methods of Structural Analysis". Pergamon Press. (1975).
- (5) J. Díaz del Valle y A. Samartín "Una contribución al Estudio de Hiperelementos Finitos en Flexión de Placas". Publicación AE-80.4. Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander. - (1980).
- (6) A. Samartín Quiroga "Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos de Análisis Estructural de Tableros de Puentes". Universidad de Santander (1979).
- (7) B.M. Irons. "Energy Methods in Finite Element Analysis". Capítulo 16. John Wiley and Sons (1979).

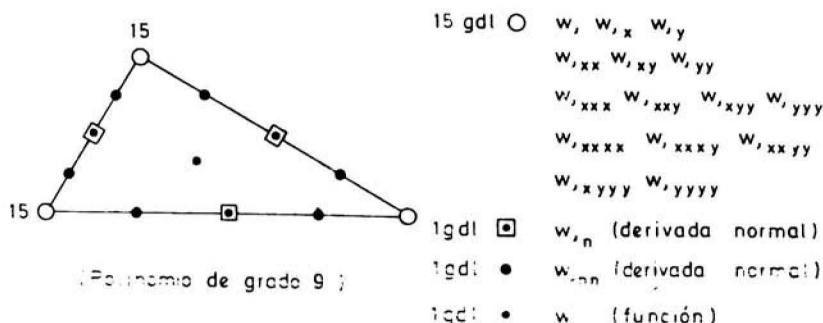


Figura 8. Elemento triangular de continuidad

TABLA 1. Análisis comparativo de resultados. Círculo

NUDO	ALINEACION					CURVATURA				
	CIRCULO	MEF 1	MEF 2	MEF 3	MEF 4	CIRCULO	MEF 1	MEF 2	MEF 3	MEF 4
CASO $\alpha = 5^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0205	0.0262	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0000
2	0.0875	0.0875	0.0875	0.0795	0.0787	0.0100	0.0100	0.0100	0.0109	0.0120
3	0.1763	0.1763	0.1763	0.1845	0.1853	0.0100	0.0100	0.0100	0.0109	0.0120
4	0.2680	0.2680	0.2680	0.2461	0.2401	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 10^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0410	0.0523	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0000
2	0.1763	0.1763	0.1763	0.1601	0.1586	0.0100	0.0100	0.0100	0.0109	0.0120
3	0.3640	0.3640	0.3640	0.3819	0.3837	0.0100	0.0100	0.0100	0.0109	0.0120
4	0.5774	0.5774	0.5774	0.5239	0.5255	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 15^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0615	0.0784	0.0100	0.0100	0.0101	0.0100	0.0000
2	0.2680	0.2680	0.2680	0.2428	0.2403	0.0100	0.0101	0.0101	0.0110	0.0121
3	0.5774	0.5773	0.5773	0.6090	0.6123	0.0100	0.0101	0.0101	0.0110	0.0121
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.8841	0.8545	0.0100	0.0100	0.0101	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 20^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0819	0.1045	0.0100	0.0100	0.0102	0.0100	0.0000
2	0.3640	0.3641	0.3640	0.3290	0.3255	0.0100	0.0102	0.0102	0.0111	0.0122
3	0.8391	0.8390	0.8391	0.8932	0.8987	0.0100	0.0102	0.0102	0.0111	0.0122
4	1.7321	1.7321	1.7321	1.4450	1.3781	0.0100	0.0100	0.0102	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 25^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.1023	0.1305	0.0100	0.0100	0.0102	0.0100	0.0000
2	0.4683	0.4685	0.4683	0.4199	0.4154	0.0100	0.0103	0.0102	0.0112	0.0123
3	1.1918	1.1914	1.1918	1.2884	1.2984	0.0100	0.0103	0.0102	0.0112	0.0123
4	3.7321	3.7321	3.7321	2.6268	2.4223	0.0100	0.0103	0.0102	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 30^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.1226	0.1563	0.0100	0.0100	0.0104	0.0100	0.0000
2	0.5774	0.5777	0.5774	0.5175	0.5117	0.0100	0.0104	0.0104	0.0113	0.0124
3	1.7321	1.7310	1.7321	1.9272	1.9479	0.0100	0.0104	0.0104	0.0113	0.0124
4	=	=	=	8.1569	6.3987	0.0100	0.0100	0.0104	0.0100	0.0000
CASO $\alpha = 5^\circ, \alpha = 10^\circ, \alpha = 30^\circ$										
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0447	0.0561	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0000
2	0.1763	0.1760	0.1759	0.1524	0.1502	0.0100	0.0101	0.0101	0.0101	0.0107
3	0.5774	0.5755	0.5757	0.6229	0.6280	0.0100	0.0103	0.0102	0.0118	0.0132
4	1.7321	1.7321	1.7321	1.3456	1.2575	0.0100	0.0100	0.0104	0.0100	0.0000

MEF. 1: Condiciones especificadas de  $y'$  e  $y''$  en los puntos de entrada y salida.MEF. 2: Condiciones especificadas de  $y'$  e  $y''$  libre en los puntos de entrada y salida.MEF. 3: Condiciones especificadas de  $y'$  e  $y''$  libre en los puntos de entrada y salida.MEF. 4: Valores de  $y'$  e  $y''$  sin especificar.

TABLA 2. Análisis comparativo de resultados. Clotoide (4 puntos).

NUDO	ALINEACION									
	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4		CASO 5	
	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.
1	10.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2255	0.2605	0.0555	0.0605	0.0555	0.0852	0.055	0.1093	0.4287	0.4461
3	0.2255	0.2605	0.2255	0.2021	0.0555	0.0857	0.2255	0.2131	0.4287	0.4461
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
NUDO	CURVATURA									
	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4		CASO 5	
	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0067	0.0087	0.0033	0.0041	0.0033	0.0070	0.0033	0.0082	0.0090	0.0098
3	-0.0067	-0.0087	0.0067	0.0029	-0.0033	-0.0070	-0.0067	-0.0062	-0.0090	-0.0098
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TABLA 3. Análisis comparativo de resultados. Clotoide (6 puntos).

NUDO	ALINEACION					
	CASO 6		CASO 7		CASO 8	
	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0555	0.0491	0.2255	0.2213	0.0555	0.0529
3	0.2255	0.2526	0.4287	0.4423	0.4287	0.4451
4	0.2255	0.2526	0.4287	0.4423	0.4287	0.4451
5	0.0555	0.0491	0.2255	0.2213	0.0555	0.0529
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
NUDO	CURVATURA					
	CASO 6		CASO 7		CASO 8	
	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.	EXACT	MEF.
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0033	0.0016	0.0067	0.0065	0.0033	0.0030
3	0.0067	0.0094	0.0090	0.0106	0.0090	0.0100
4	-0.0067	-0.0094	-0.0090	-0.0106	-0.0090	-0.0100
5	-0.0033	-0.0026	-0.0067	-0.0065	-0.0033	-0.0030
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000